

У статті розглядаються питання математичного моделювання напружено-деформованого стану шаруватих ортотропних пластин, що лежать на пружній основі. Поведінка кожного шару описується рівняннями узагальненої теорії пластин, для моделювання пружної основи використовується двохпараметрична модель Пастернака. Можливості запропонованої моделі ілюструються на прикладах розрахунку відгуку пластин на статичне навантаження. Результати розрахунку за запропонованою моделлю співставляються з відомими розв'язками

Ключові слова: шарувата пластина, ортотропія, пружна основа, напружено-деформований стан, статика

В статье рассматриваются вопросы математического моделирования напряженно-деформированного состояния слоистых ортотропных пластин, лежащих на упругом основании. Поведение каждого слоя описывается уравнениями обобщенной теории пластин, для моделирования упругого основания используется двухпараметрическая модель Пастернака. Возможности предложенной модели иллюстрируются на примерах расчета отклика пластин на статическое нагружение. Результаты расчета по предложенной модели сопоставляются с известными решениями

Ключевые слова: слоистая пластина, ортотропия, упругое основание, напряженно-деформированное состояние, статика

УДК 539.3:534.1

DOI: 10.15587/1729-4061.2014.27632

МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО- ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ШАРУВАТИХ ОРТОТРОПНИХ ПЛАСТИН НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

С. В. Угрімов

Кандидат технічних наук,
старший науковий співробітник
Інститут проблем машинобудування
ім. А. М. Підгорного НАН України
вул. Дм. Пожарського 2/10, м. Харків, Україна, 61046
E-mail: sugrimov@ipmach.kharkov.ua

Ю. М. Тормосов

Доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри*
E-mail: tormosov@ukr.net

В. А. Куценко

Кандидат технічних наук, доцент, доцент*
E-mail: vakutsenko@mail.ua

І. В. Лебединець

Кандидат технічних наук, доцент, доцент*
E-mail: igor-lebedinec@mail.ru

*Кафедра механіки та графіки

Харківський держаний університет

харчування та торгівлі

вул. Клочківська, 333, м. Харків, Україна, 61051

1. Вступ

Аналіз напружено-деформованого стану (НДС) багат шарових конструкцій, що лежать на пружній основі, є важливим завданням механіки, яке має велике практичне значення для цивільного й промислового будівництва, машинобудування та аерокосмічної промисловості. При розрахунку споруд, підлог промислових будівель, покриттів автомобільних доріг та аеродромів, фундаментів та основ під бази та у ряді інших задач потрібен аналіз взаємодії пружної багат шарової конструкції й основи [1–3].

Якість теоретичної оцінки НДС багат шарових конструкцій, що лежать на пружній основі, визначається ефективністю моделювання багат шарової конструкції і її взаємодії з пружною основою. Таким чином, виникає проблема обґрунтованого вибору моделей середовищ і їх відповідності реальним властивостям системи «плита – пружна основа» [1–3].

Крім того, при розробці нових моделей та методів розрахунку конструкцій необхідно пам'ятати, що вони повинні не тільки з достатньою точністю описувати НДС конструкції, але й мати високу універсальність та алгоритмічність.

2. Аналіз літературних даних

При дослідженні багат шарових конструкцій, що лежать на пружній основі, величезне значення має правильний вибір математичної моделі багат шарової конструкції. Необхідно враховувати, що в таких конструкціях можуть виникати значні поперечні деформації, які класичними двовимірними теоріями багат шарових пластин описуються недостатньо точно. До теперішнього часу розроблено досить багато різних методів розрахунку шаруватих конструкцій [4, 5]. Більшість із них орієнтована на певний вид

конструкцій (тонкі або товсті конструкції, симетричний або несиметричний пакет шарів, наявність тільки жорстких шарів в пакеті і т. д.). Отже, існує потреба в розробці універсальних уточнених методів розрахунку багатошарових конструкцій, які можна застосувати до широкого класу задач.

Одним із найбільш простих способів побудови уточнених моделей є застосування розвинень в степеневі ряди за поперечною координатою [4–6]. На практиці частіше за все застосовуються теорії першого порядку, які виходять з того, що деформації лінійно залежать від поперечної координати [7, 8]. При цьому поперечними деформаціями, як правило, нехтують або вважають, що вони не змінюються по товщині. Однак, відомо, що розподіл зсувних поперечних напружень по товщині навіть для відносно тонких пластин має суттєво нелінійний характер [9, 10]. При дослідженні шаруватих пластин на пружній основі необхідно більш точно враховувати поперечні деформації у кожному шарі. Для цього найбільш прийнятні дискретно-структурні моделі багатошарових конструкцій, які дозволяють більш точно описати поведінку кожного шару конструкції. Детальний аналіз двовимірних методів дається в роботах [4, 5].

При розрахунку НДС конструкцій, що лежать на пружній основі, як правило, головна увага приділяється поведінці самої конструкції, а не детальному аналізу поведінки пружної основи [1–3, 11, 12]. При цьому сама основа описується спрощено, а основне значення представляє її реакція на переміщення конструкції. Тому задача зводиться до знаходження математичного виразу, який буде з достатньою точністю визначати реакцію R основи в зоні контакту [1–3]. Зазвичай, з метою спрощення задачі, пружну основу моделюють шаром лінійних пружин, що деформуються незалежно одна від одної. Ця модель носить назву моделі Вінкlera і має вигляд $R = k_1 w$ (w – локальний прогин, k_1 – коефіцієнт жорсткості основи). Більш реалістичну модель деформування основи дає модель Пастернака, яка враховує не тільки величину прогину, але й роботу основи на зсув. У цьому випадку реакція основи залежить від двох параметрів і може бути записана у вигляді $R = k_1 w - k_2 \nabla^2 w$ (k_2 – коефіцієнт жорсткості основи на зсув). Існують й інші моделі пружних основ [3].

Дана стаття продовжує дослідження, розпочаті в роботах [10, 13]. Вона присвячена побудові ефективного аналітико-чисельного методу розв'язання задачі аналізу НДС багатошарових пластин на пружній основі. Поведінка шаруватої конструкції описується рівняннями узагальненої теорії пластин [10]. Пружна основа моделюється рівнянням Пастернака [2, 3].

3. Мета та задачі дослідження

Метою роботи є удосконалення методів розрахунку шаруватих ортотропних пластин на пружній основі за рахунок застосування високоефективних рівнянь

узагальненої теорії пластин для аналізу поведінки конструкції.

Для досягнення даної мети необхідно розв'язати наступні задачі:

- на основі рівнянь узагальненої теорії пластин та двохпараметричної моделі основи Пастернака провести розробку уточненої математичної моделі та методу розрахунку шаруватої конструкції, що лежить на пружній основі;
- для оцінки працездатності та ефективності запропонованого методу провести порівняння отриманих результатів з існуючими розв'язками;
- дослідити вплив характеристик основи на напружено-деформований стан шаруватої пластини.

4. Моделювання багатошарової конструкції на пружній основі

4. 1. Математична постановка задачі

Шарувата конструкція лежить на пружній основі (рис. 1) і складається з I шарів постійної товщини (h_i – товщина i -го шару). Шари виготовлені із ортотропних матеріалів, θ_i – кут армування у i -му шарі. Припускається, що армування кожного шару є паралельним координатним осям Ox_1, Ox_2 . Контакт між шарами, між пластиною та основою виключає їхнє розшаровування і взаємне проковзування. До зовнішньої поверхні першого шару прикладено зовнішнє навантаження

$$q_3^1 = q_3^1(x_1, x_2), \quad q_1^1 = 0, q_2^1 = 0, \quad (1)$$

а до зовнішньої поверхні I -го шару – навантаження

$$q_3^I = q_3^I(x_1, x_2), \quad q_1^I = 0, q_2^I = 0, \quad (2)$$

що є реакцією пружної основи. Тут q_α^i – проекція вектора навантажень на координатну вісь.

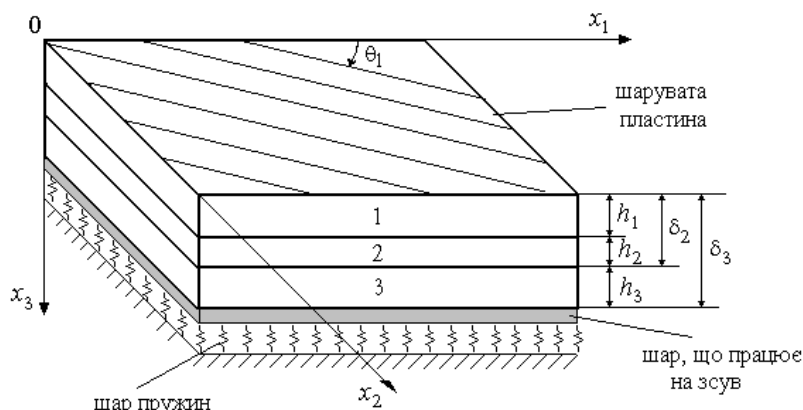


Рис. 1. Шарувата пластина на пружній основі Пастернака

4. 2. Математична модель шаруватої конструкції

Поведінка шаруватої пластини описується рівняннями узагальненої теорії багатошарових пластин [10, 13], що дозволяє вибирати необхідну точність опису НДС залежно від композиції пакета шарів. У загальному випадку переміщення точки i -го шару описуються наступними кінематичними залежностями:

$$u_{\alpha}^i(x_1, x_2, x_3, t) = u_{\alpha} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j^k u_{\alpha k}^j + \sum_{k=1}^{K_{\alpha}^i} (x_3 - \delta_{i-1})^k u_{\alpha k}^i, \quad (3)$$

$$\text{де } h_j^k = (h_j)^k, \quad \delta_i = \sum_{j=1}^i h_j, \quad \delta_{i-1} \leq x_3 \leq \delta_i, \quad i = \overline{1, I}, \quad u_{\alpha}^i (\alpha = \overline{1, 3}) -$$

переміщення точки i -го шару у напрямку осі Ox_{α} ; $u_{\alpha}, u_{\alpha k}^i$ – коефіцієнти розвинень переміщень у степеневі ряди, що є функціями аргументів x_1, x_2, t ; K_{α}^i – максимальні степені поперечної координати для площинних ($\alpha = 1, 2$) і поперечних ($\alpha = 3$) переміщень точок i -го шару, які вибираються в залежності від необхідної точності.

З метою спрощення та підвищення алгоритмічності задачі ми будемо враховувати однакову кількість членів степеневих рядів у всіх шарах, тобто $K_1 = K_2, K_2 = K_3, K_3 = K_3$ ($i = \overline{1, I}$), де K_1, K_2, K_3 – параметри, які задаються в залежності від необхідної точності розв'язання задачі. В цьому випадку гіпотези узагальненої теорії (3) можуть бути спрощені і записані в більш компактному вигляді

$$u_{\alpha}^i(x_1, x_2, x_3, t) = u_{\alpha} + \sum_{k=1}^{K_{\alpha}} \left[\sum_{j=1}^{i-1} h_j^k u_{\alpha k}^j + (x_3 - \delta_{i-1})^k u_{\alpha k}^i \right]. \quad (4)$$

При цьому параметри K_1 і K_2 , які описують кількість утримуваних членів степеневих рядів для площинних переміщень, будемо вибирати однаковими та рівними параметру K . Надалі узагальнена теорія буде позначатися за кількістю утримуваних членів у степеневих рядах (4) для площинних і поперечних переміщень – теорія $\{K, K_3\}$.

Прийняті кінематичні залежності (4) при $K = 1, K_3 = 0$ є еквівалентними гіпотезам теорії Е. І. Григолюка і П. П. Чулкова [7], при $K = 3, K_3 = 2$ – гіпотезам уточненої теорії високого порядку [14].

Деформації в кожному шарі пластини припускаються малими і описуються лінійними співвідношеннями

$$\epsilon_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta}^i + u_{\beta,\alpha}^i), \quad \alpha = \overline{1, 3}, \quad \beta = \overline{1, 3}, \quad i = \overline{1, I}. \quad (5)$$

Застосування гіпотез (4) приводить до неперервного по товщині пакета поля переміщень і забезпечує безперервність деформацій $\epsilon_{11}^i, \epsilon_{22}^i$ та кускову неперервність поперечних деформацій по товщині пакету. Тому в рамках запропонованої теорії існує принципова можливість виконати умови контакту між шарами із заданою точністю [10, 13].

Зв'язок між компонентами тензорів деформацій і напружень для розглянутого випадку має вигляд [15]

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11}^i \\ \epsilon_{22}^i \\ \epsilon_{33}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}^i}{E_2} & -\frac{\nu_{31}^i}{E_3} \\ -\frac{\nu_{12}^i}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}^i}{E_3} \\ -\frac{\nu_{13}^i}{E_1} & -\frac{\nu_{23}^i}{E_2} & \frac{1}{E_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{11}^i \\ p_{22}^i \\ p_{33}^i \end{pmatrix},$$

$$\epsilon_{12}^i = \frac{1}{2G_{12}^i} p_{12}^i, \quad \epsilon_{13}^i = \frac{1}{2G_{13}^i} p_{13}^i, \quad \epsilon_{23}^i = \frac{1}{2G_{23}^i} p_{23}^i, \quad (6)$$

де $E_{\alpha}, \nu_{\alpha\beta}^i$ – модулі Юнга та коефіцієнти Пуассона для i -го шару; $G_{12}^i, G_{13}^i, G_{23}^i$ – модулі зсуву для i -го шару, $p_{\alpha\beta}^i$ – тензор напружень.

У силу симетрії модулі Юнга і коефіцієнти Пуассона пов'язані співвідношеннями:

$$E_1 \nu_{21}^i = E_2 \nu_{12}^i, \quad E_2 \nu_{32}^i = E_3 \nu_{23}^i, \quad E_3 \nu_{13}^i = E_1 \nu_{31}^i.$$

Зусилля та моменти в i -му шарі визначаються за формулою

$$N_{\alpha\beta}^{ik} = N_{\beta\alpha}^{ik} = \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} (x_3 - \delta_{i-1})^k p_{\alpha\beta}^i dx_3, \quad \alpha, \beta = \overline{1, 3}, \quad i = \overline{1, I}. \quad (7)$$

4. 3. Математична модель основи

Для описання пружної основи використовується модель Пастернака [2, 3]

$$q_3^i = k_1 u_3^i(x_1, x_2, \delta_i, t) + k_2 \nabla^2 u_3^i(x_1, x_2, \delta_i, t), \quad q_1^i = q_2^i = 0. \quad (8)$$

Тут k_1 – коефіцієнт жорсткості на стискання, k_2 – коефіцієнт жорсткості на зсув основи, ∇^2 – оператор Лапласа.

При $k_2 = 0$ модель Пастернака співпадає з моделлю Вінклера [3, 13].

4. 4. Визначальні рівняння і метод їх розв'язання

Рівняння і граничні умови, що описують деформування шаруватих пластин на пружній основі, отримані за допомогою варіаційного принципу, аналогічно тому, як це було зроблено для ізотропних багатошарових пластин [10, 13]. Рівняння руху в зусиллях і моментах мають наступний вигляд:

$$\sum_{i=1}^I L_{\alpha}^i + q_{\alpha}^I - q_{\alpha}^I = 0,$$

$$N_{1\alpha,1}^{ik_{\alpha}} + N_{\alpha 2,2}^{ik_{\alpha}} - k_{\alpha} N_{\alpha 3}^{ik_{\alpha}-1} + h_{\alpha}^{k_{\alpha}} \sum_{j=1}^{I-1} L_{\alpha}^{j+1} - h_{\alpha}^{k_{\alpha}} q_{\alpha}^I = 0, \quad (9)$$

де $L_1^i = N_{11,1}^{i0} + N_{12,2}^{i0}$, $L_2^i = N_{12,2}^{i0} + N_{12,1}^{i0}$, $L_3^i = N_{13,1}^{i0} + N_{23,2}^{i0}$.

Таким чином, НДС пластини описується $(2K + K_3)I + 3$ диференціальними рівняннями (9). Рівняння згину шаруватої пластини (9) можуть бути записані в переміщеннях

$$\Lambda \cdot \bar{U} = \bar{Q}, \quad (10)$$

де \bar{U} – вектор, компонентами якого є шукані функції $\bar{U}^T = (u_{\alpha}, u_{\alpha k_{\alpha}}^i)$, $\alpha = \overline{1, 3}$, $i = \overline{1, I}$, $k_{\alpha} = \overline{1, K_{\alpha}}$; Λ – матриця жорсткості, елементи якої через їх громіздкість в роботі не наводяться; \bar{Q} – вектор, компоненти якого залежать від зовнішньої сили, що діє на перший шар пластини $\bar{Q}^T = (q_1^i, q_2^i, q_3^i, 0, \dots, 0)$. Зауважимо, що коефіцієнти впливу пружної основи увійдуть до матриці жорсткості пластини.

Вид граничних умов на контурі опирання для прямокутної шарнірно опертої пластини наведено нижче:

$$\text{при } x_1 = 0, \quad x_1 = A - \sum_{i=1}^I N_{11}^{i0} = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0,$$

$$N_{11}^{ik_1} + h_1^{k_1} \sum_{j=1}^{I-1} N_{11}^{j+1,0} = 0, \quad u_{2k} = 0, \quad u_{3k_3} = 0,$$

при $x_2 = 0$, $x_2 = B$ – $u_1 = 0$, $\sum_{i=1}^I N_{22}^{i0} = 0$, $u_3 = 0$,

$$u_{1k_1}^i = 0, \quad N_{22}^{ik_2} + h_i^{k_2} \sum_{j=1}^{I-1} N_{22}^{j10} = 0,$$

$$u_{3k_3}^i = 0, \quad k_\alpha = \overline{1, K_\alpha}, \quad i = \overline{1, I}. \quad (11)$$

Розв'язок задачі (9), (11) здійснюється аналогічно методу, викладеному в роботі [10, 13]. Переміщення і зовнішнє навантаження розвиваються в подвійні ряди по системі ортогональних функцій, що задовольняють умовам на контурі опирання. В результаті задача зводиться до розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

5. Чисельні дослідження та обговорення результатів

Для оцінки працездатності та ефективності запропонованого методу було розглянуто ряд задач про деформування шарнірно опертих пластин, що лежать на пружній основі Вінклера та Пастернака, під дією навантаження виду

$$q_3^1 = q_0 \cdot \sin \frac{\pi x_1}{A} \sin \frac{\pi x_2}{B}, \quad q_1^1 = q_2^1 = 0, \quad (12)$$

де q_0 – інтенсивність зовнішнього навантаження.

Результати розрахунку за запропонованою теорією порівнювалися з відомими в літературі даними, які отримані за іншими теоріями. Результати наводяться у «безрозмірному» виді [11]:

$$\kappa_1 = \frac{h^3}{A^4} k_1, \quad \kappa_2 = \frac{h^3}{A^2} k_2, \quad \bar{u}_3 = \frac{100h^3}{q_0 A^4} \cdot u_3^i \left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, x_3 \right),$$

$$\bar{p}_{11}^i = \frac{h^2}{q_0 A^2} \cdot p_{11}^i \left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, x_3 \right),$$

$$\bar{p}_{22}^i = \frac{h}{q_0 A} \cdot p_{22}^i \left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, x_3 \right), \quad \bar{p}_{13}^i = \frac{h}{q_0 A} \cdot p_{13}^i \left(0, \frac{B}{2}, x_3 \right), \quad (13)$$

де $h = \delta_1$ – загальна товщина пакету.

Розглянуто згин одношарової ортотропної прямокутної пластини ($B=2A$) з механічними характеристиками: $E_1^1 = 20,83$ Па, $E_2^1 = 10,94$ Па, $E_3^1 = 10$ Па, $G_{12}^1 = 6,10$ Па, $G_{13}^1 = 3,71$ Па, $G_{23}^1 = 6,19$ Па, $\nu_{12}^1 = \nu_{13}^1 = 0,44$, $\nu_{32}^1 = 0,23$ [12].

В табл. 1 наведені результати розрахунку прогину пластини посередині зовнішніх поверхонь пластини, отримані на основі запропонованої теорії із різною кількістю утримуваних членів у рядах (4). При цьому розглянуто прогин для трьох пластин різної товщини, які лежать на пружній основі Вінклера ($\kappa_1 = 10, \kappa_2 = 0$), на основі Пастернака $\kappa_1 = 10, \kappa_2 = 10$, а також при відсутності основи ($\kappa_1 = 0, \kappa_2 = 0$).

Аналогічні дані для напружень наведено у табл. 2, 3.

З табл. 1–3 видно, що при збільшенні кількості утримуваних членів у степеневих рядах (4) результати, отримані за запропонованою теорією, збігаються. Краще збігаються результати для більш тонких пластин, особливо для їх переміщень. Тут результати за теоріями {3, 2} {5, 4} і {7, 6} практично співпадають.

Гірше збігаються результати для переміщень та напружень у товстих пластинах, у яких необхідно брати до уваги поперечні деформації, що потребує врахування більшої кількості членів у рядах (4). У цьому випадку помітним стає обтиснення пластини.

Таблиця 1

Прогин пластини

$\frac{A}{h}$	Теорія	Прогин, $\bar{u}_3^1(A/2, B/2, 0) / \bar{u}_3^1(A/2, B/2, \delta_1)$		
		без пружної основи	основа Вінклера	основа Пастернака
4	{1, 0}	0.44523/0.44523	0.42626/0.42626	0.27935/0.27935
	{3, 2}	0.51283/0.49459	0.48957/0.47046	0.31910/0.29370
	{5, 4}	0.51316/0.49490	0.48986/0.47075	0.31922/0.29382
	{7, 6}	0.51316/0.49490	0.48986/0.47075	0.31922/0.29382
10	{1, 0}	0.33521/0.33521	0.32434/0.32434	0.23165/0.23165
	{3, 2}	0.39664/0.39617	0.38154/0.38106	0.25973/0.25910
	{5, 4}	0.39665/0.39618	0.38155/0.38106	0.25974/0.25911
	{7, 6}	0.39665/0.39618	0.38155/0.38106	0.25974/0.25911
20	{1, 0}	0.31941/0.31941	0.30952/0.30952	0.22399/0.22399
	{3, 2}	0.38141/0.38138	0.36740/0.36737	0.25283/0.25280
	{5, 4}	0.38141/0.38138	0.36740/0.36737	0.25283/0.25279
	{7, 6}	0.38141/0.38138	0.36740/0.36737	0.25283/0.25279

Таблиця 2

Напруження \bar{p}_{11}^1 у пластині

$\frac{A}{h}$	Теорія	Напруження $\bar{p}_{11}^1(A/2, B/2, 0) / \bar{p}_{11}^1(A/2, B/2, \delta_1)$		
		без пружної основи	основа Вінклера	основа Пастернака
4	{1, 0}	-0.45740/0.45740	-0.43791/0.43791	-0.28699/0.28699
	{3, 2}	-0.48995/0.47811	-0.46746/0.45506	-0.30267/0.28619
	{5, 4}	-0.47962/0.46906	-0.45754/0.44648	-0.29582/0.28111
	{7, 6}	-0.47946/0.46896	-0.45739/0.44639	-0.29569/0.28108
10	{1, 0}	-0.46529/0.46529	-0.45020/0.45020	-0.32154/0.32154
	{3, 2}	-0.46051/0.45971	-0.44299/0.44217	-0.30165/0.30058
	{5, 4}	-0.45884/0.45809	-0.44139/0.44060	-0.30054/0.29953
	{7, 6}	-0.45884/0.45809	-0.44138/0.44060	-0.30054/0.29952
20	{1, 0}	-0.46649/0.46649	-0.45205/0.45205	-0.32713/0.32713
	{3, 2}	-0.45680/0.45665	-0.44003/0.43987	-0.30285/0.30264
	{5, 4}	-0.45639/0.45623	-0.43963/0.43947	-0.30257/0.30237
	{7, 6}	-0.45639/0.45623	-0.43963/0.43947	-0.30257/0.30237

Аналізуючи дані у табл. 1–3 можна стверджувати, що врахування пружної основи суттєво зменшує переміщення та напруження у пластині. При цьому результати для пластини на пружній основі за моделлю Пастернака істотно менші за аналогічні дані, отримані за моделлю Вінклера, що говорить про необхідність при розгляді впливу основи враховувати її роботу на зсув.

Досліджено залежність центрального прогину прямокутної пластини від коефіцієнта її товщини A/h . На рис. 2 наведено результати розрахунку за запропонованим методом при $K_1=7$, $K_3=6$ для прогину $\bar{u}(A/2, B/2, 0)$ (суцільна лінія), які порівнюються з даними, наведеними у роботі [11], де для описання поведінки пластини використовується уточнена двовимірна теорія (пунктирна лінія). Видно, що результати достатньо добре узгоджуються між собою. А наявні відмінності, особливо для товстих пластин, пояснюються більш високою точністю описання НДС

у запропонованій теорії. Отримані результати свідчать про те, що врахування зсуву у пружній основі істотним чином впливає на величину прогину.

Таблиця 3

Напруження \bar{p}_{22}^i у пластині

$\frac{A}{h}$	Теорія	Напруження $\bar{p}_{22}^i(A/2, B/2, 0) / \bar{p}_{22}^i(A/2, B/2, \delta_i)$		
		без пружної основи	основа Вінклера	основа Пастернака
4	{1, 0}	-0.76882/0.76882	-0.73605/0.73605	-0.48238/0.48238
	{3, 2}	-0.77102/0.70111	-0.73804/0.66484	-0.49639/0.39909
	{5, 4}	-0.74397/0.67752	-0.71208/0.64249	-0.47848/0.38598
	{7, 6}	-0.74356/0.67727	-0.71168/0.64227	-0.47816/0.38590
10	{1, 0}	-1.86937/1.86937	-1.80874/1.80874	-1.29183/1.29183
	{3, 2}	-1.61822/1.59466	-1.55746/1.53299	-1.06716/1.03545
	{5, 4}	-1.60750/1.58420	-1.54713/1.52294	-1.06004/1.02869
	{7, 6}	-1.60748/1.58418	-1.54711/1.52293	-1.06003/1.02868
20	{1, 0}	-3.72268/3.72268	-3.60746/3.60746	-2.61058/2.61058
	{3, 2}	-3.15027/3.13883	-3.03496/3.02310	-2.09203/2.07673
	{5, 4}	-3.14493/3.13352	-3.02981/3.01798	-2.08848/2.07322
	{7, 6}	-3.14493/3.13352	-3.02981/3.01798	-2.08848/2.07322

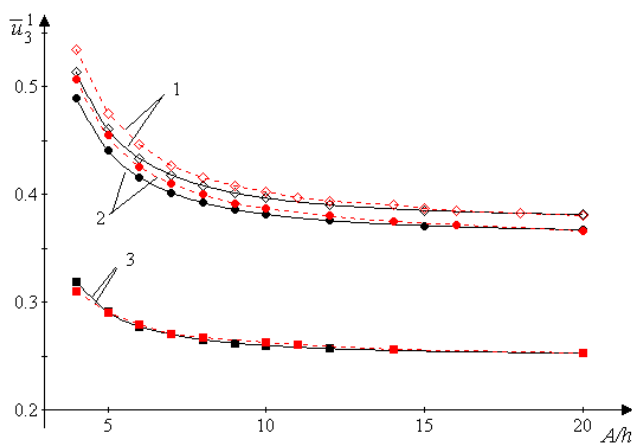


Рис. 2. Залежність прогину пластини від коефіцієнту товщини A/h : 1 — пластина без урахування основи; 2 — пластина на основі Вінклера; 3 — пластина на основі Пастернака

Проведено дослідження НДС чотирьохшарового композиту [12], з кутами армування (0/90/90/0) та механічними властивостями волокон $E_1=E_3=17,2369 \cdot 10^4$ МПа, $E_2=E_3=0,6895 \cdot 10^4$ МПа, МПа, $\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=0,25$, $G_{12}=G_{13}=0,3447 \cdot 10^4$ МПа, $G_{23}=0,1379 \cdot 10^4$ МПа під впливом навантаження (12). Пружна основа має характеристики $k_1=0,3$ МПа/м, $k_2=0,3$ МН/м.

На рис. 3, а, б представлені результати розрахунків напружень на основі теорій {1, 0} і {7, 6} для тонкої пластини ($A/h=100$) на пружній основі Пастернака та без урахування впливу основи. На рис. 3, а наведено характерну зміну напружень \bar{p}_{11}^i по товщині пластини, а на рис. 3, б — напружень \bar{p}_{13}^i . Суцільна лінія відповідає даним, отриманим за теорією {7, 6}, а пунктирна — за теорією {1, 0}. Видно, що врахування пружної основи істотно знижує рівень напружень у шарах пластини.

Деяка відмінність результатів, отриманих за теоріями {1, 0} і {7, 6}, для напружень \bar{p}_{13}^i обумовлена тим,

що навіть для тонких пластин розподіл зсувних поперечних напружень по товщині має суттєво нелінійний характер, який погано апроксимується теорією {1, 0}. Відзначимо, що для розглянутої пластини характер розподілу напружень \bar{p}_{11}^i по товщині має кусково лінійний характер, але при збільшенні товщини пластини або при наявності локалізованих навантажень, він також стає суттєво нелінійним.

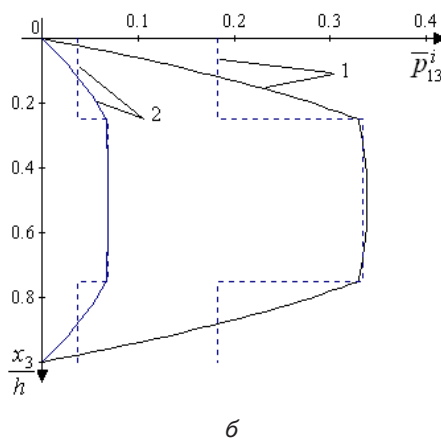
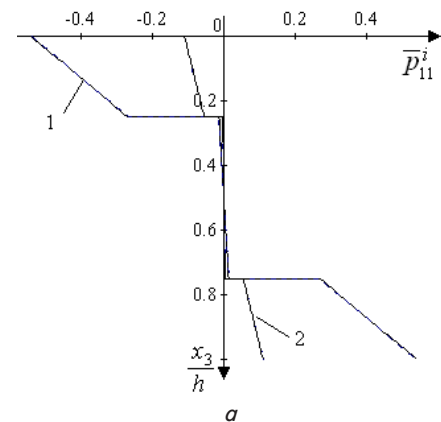


Рис. 3. Зміна напружень по товщині шаруватої пластини: а — напруження \bar{p}_{11}^i ; б — напруження \bar{p}_{13}^i : 1 — без пружної основи, 2 — пружна основа Пастернака

Таким чином, встановлено, що навіть для тонких пластин при необхідності визначення поперечних зсувних напружень необхідно застосовувати теорії високого порядку ({3, 2}, {5, 4}, {7, 6}).

6. Висновки

У роботі сформульовано і розв'язано статичну задачу про визначення НДС шаруватих пластин на пружній основі. На основі рівнянь узагальненої теорії пластин та двохпараметричної моделі пружної основи проведено розробку уточненої математичної моделі шаруватої конструкції, що лежить на пружній основі. Достовірність запропонованого методу доведено порівнянням отриманих результатів з існуючими розв'язками.

Встановлено, що наявність пружної основи істотно змінює характер НДС, суттєво зменшуючи переміщення та напруження у пластині. При цьому результати

для пластини на пружній основі за моделлю Пастернака значно менші за аналогічні дані, отримані за моделлю Вінклера, що говорить про необхідність при розгляді впливу основи враховувати її роботу на зсув.

Показано, що запропонована теорія може бути використана для визначення усіх компонентів перемі-

щень та напружень, як для тонких, так і для товстих пластин, які лежать на пружній основі.

Показано, що при необхідності дослідження поперечних зсувних напружень даже для тонких пластин необхідно застосовувати теорії високого порядку. Метод може бути успішно узагальнений на випадок нестационарного навантаження.

Література

1. Власов, В. З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании [Текст] / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. – М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1960. – 490 с.
2. Пастернак, П. Л. Основы метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели [Текст] / П. Л. Пастернак. – М.: Госстройиздат, 1954. – 56 с.
3. Kerr, A. D. Elastic and viscoelastic foundation models [Text] / A. D. Kerr // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1964. – Vol. 31, № 3. – P. 491–498. doi: 10.1115/1.3629667
4. Григолюк, Э. И. Статика упругих слоистых оболочек [Текст] / Э. И. Григолюк, П. П. Чулков. – М.: НИИ Механики МГУ, 1999. – 215 с.
5. Chen, W. A selective review on recent development of displacement-based laminated plate theories [Text] / W. Chen, Z. Wu // Recent patents on mechanical engineering. – 2008. – Vol. 1, Issue 1. – P. 29–44. doi:10.2174/2212797610801010029
6. Matsunaga, H. Assessment of a global higher-order deformation theory for laminated composite and sandwich plates [Text] / H. Matsunaga // Journal of composite materials. – 2002. – Vol. 36, Issue 3. – P. 279–291. doi: 10.1016/S0263-8223(02)00013-2
7. Григолюк, Э. И. Теория вязкоупругих многослойных оболочек с жестким наполнителем при конечных прогибах [Текст] / Э. И. Григолюк, П. П. Чулков // Журн. прикл. механики и технической физики. – 1964. – № 5. – С. 109–117.
8. Reddy, J. N. Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis [Text] / J. N. Reddy. – New York: CRC Press, 2004. – 832 p.
9. Pagano, N. J. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates [Text] / N. J. Pagano // Journal of composite materials. – 1970. – Vol. 4. – P. 20–34. doi: 10.1177/002199837000400102
10. Ugrimov, S. V. Generalized theory of multilayer plates [Text] / S. V. Ugrimov // International Journal of Solids and Structures. – 2002. – Vol. 39, Issue 4. – P. 819–839. doi: 10.1016/S0020-7683(01)00253-0.
11. Zenkour, A. M. Bending of orthotropic plates resting on Pasternak's foundations using mixed shear deformation theory [Text] / A. M. Zenkour // Acta Mechanica Sinica. – 2011. – Vol. 27, Issue 6. – P. 956–962. doi: 10.1007/s10409-011-0515-z
12. Akavci, S. S. The first order shear deformation theory for symmetrically laminated composite plates on elastic foundation [Text] / S. S. Akavci, H. R. Yerli, A. Dogan // The Arabian Journal for Science and Engineering. – 2007. – Vol. 32, Issue 2B. – P. 341–348.
13. Шупиков, А. Н. Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация [Текст] / А. Н. Шупиков, Я. П. Бузько, Н. В. Сметанкина, С. В. Угримов. – Харьков: ИД «ИНЖЭК», 2004. – 252 с.
14. Shupikov, A. N. High-order theory of multilayer plates. The impact problem [Text] / A. N. Shupikov, S. V. Ugrimov, A. V. Kolodiazny, V. G. Yareschenko // Int. J. Solids and Structures. – 1998. – Vol. 35, Issue 25. – P. 3391–3403. doi:10.1016/S0020-7683(98)00020-1
15. Рассказов, А. О. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек [Текст] / А. О. Рассказов, И. И. Соколовская, Н. А. Шульга. – К.: Вища школа, 1986. – 191 с.